

Exercício 1

$$i) \begin{cases} F(n+2) = F(n+1) + F(n) \\ F(1) = F(2) = 1 \end{cases}$$

Com solução da forma $F(n) = \alpha^n$, temos a equação característica:

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e obtemos a solução:

$$F(n) = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

A partir das condições iniciais $F(1) = F(2) = 1$, temos:

$$\begin{cases} F(1) = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(2) = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 = a \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) + b \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} + \sqrt{5} \frac{a-b}{2} = 1 \\ 3 \frac{a+b}{2} + \sqrt{5} \frac{a-b}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a+b=0, \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

E obtemos:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Como $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$, no limite temos $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ é a razão áurea da sequência.}$$

$$ii) \begin{cases} G(n+2) = G(n+1) + G(n) + n \\ G(1) = -1, \quad G(2) = -2 \end{cases}$$

Com a mudança de variáveis $G(n) = S(n) + an + b$, temos:

$$S(n+2) + a(n+2) + b = S(n+1) + a(n+1) + b + S(n) + an + b + n$$

$$\Rightarrow S(n+2) = S(n+1) + S(n) + n(a+1) + (b-a)$$

Para tornar a equação homogênea, precisamos de $b=a=-1$. Assim nos resta:

$$S(n+2) = S(n+1) + S(n)$$

que é a relação de recorrência para a série de Fibonacci, ou seja:

$$S(n) = c \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + d \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\Rightarrow G(n) = c \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + d \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - n - 1$$

Novamente, a partir das condições iniciais temos:

$$\begin{cases} G(1) = c \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + d \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) - 2 = -1 \\ G(2) = c \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + d \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c+d}{2} + \sqrt{5} \frac{c-d}{2} = 1 \\ 3\frac{c+d}{2} + \sqrt{5} \frac{c-d}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow c+d=0, c=\frac{1}{\sqrt{5}}, d=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

E obtemos:

$$G(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - n - 1$$

Analogamente, $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1 \Rightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - n - 2}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{n+2}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{n+1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

iii) Por fim, temos:

$$F(n) - G(n) = n+1$$

Exercício 2

$$\begin{cases} H(n+3) = 3H(n+2) + 6H(n+1) - 8H(n) \\ H(1) = 5, H(2) = 41, H(3) = 113 \end{cases}$$

Com solução da forma $H(n) = \alpha^n$, temos a equação característica:

$$\alpha^{n+3} = 3\alpha^{n+2} + 6\alpha^{n+1} - 8\alpha^n$$

$$\rightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 + 6\alpha - 8 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$$

Sabemos que $\alpha = 1$ é solução. Assim:

$$\begin{array}{r} \alpha^3 - 3\alpha^2 - 6\alpha + 8 \quad | \alpha - 1 \\ -\alpha^3 + \alpha^2 \quad \quad \quad \alpha^2 - 2\alpha + 8 \\ \hline -2\alpha^2 - 6\alpha + 8 \\ +2\alpha^2 - 2\alpha \quad \quad \quad \hline -8\alpha + 8 \\ +8\alpha - 8 \quad \quad \quad \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 - 2\alpha - 8) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{2,3} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3$$

e obtemos:

$$H(n) = a(1)^n + b(4)^n + c(-2)^n$$

A partir das condições iniciais:

$$\begin{cases} H(1) = a + 4b - 2c = 5 \\ H(2) = a + 16b + 4c = 41 \\ H(3) = a + 64b - 8c = 113 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12b + 6c = 36 \\ 60b - 6c = 108 \end{cases} \Rightarrow 72b = 144$$

$$\Rightarrow b = 2, c = 2, a = 1$$

Assim, a solução obtida é:

$$H(n) = 1 + 2 \cdot 4^n + 2 \cdot (-2)^n$$

No limite, temos a razão áurea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(n+1)}{H(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \cdot 4^{n+1} + 2 \cdot (-2)^{n+1}}{1 + 2 \cdot 4^n + 2 \cdot (-2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} \left(\frac{1}{4^{n+1}} + 2 \left(\frac{-1}{2} \right)^{n+1} + 2 \right)}{4^n \left(\frac{1}{4^n} + 2 \left(\frac{-1}{2} \right)^n + 2 \right)} = 4$$

Exercício 3

4

$$\begin{cases} S(n+3) = 8S(n+2) - 21S(n+1) + 18S(n) \\ S(1) = 2, S(2) = 31, S(3) = 170 \end{cases}$$

Com solução da forma $H(n) = \alpha^n$, temos a equação característica:

$$\alpha^{n+3} = 8\alpha^{n+2} - 21\alpha^{n+1} + 18\alpha^n$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = 8\alpha^2 - 21\alpha + 18 \Leftrightarrow \alpha^3 - 8\alpha^2 + 21\alpha - 18 = 0$$

Sabemos que $\alpha = 2$ é solução. Assim:

$$\begin{array}{r} \alpha^3 - 8\alpha^2 + 21\alpha - 18 \quad \alpha - 2 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 \quad \alpha^2 - 6\alpha + 9 \\ \hline -6\alpha^2 + 21\alpha - 18 \\ +6\alpha^2 - 12\alpha \\ \hline 9\alpha - 18 \\ -9\alpha + 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha^2 - 6\alpha + 9) = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 3$$

Como $\alpha_2 = 3$ é raiz de multiplicidade 2, a solução obtida é:

$$S(n) = a2^n + b3^n + cn3^n$$

A partir das condições iniciais:

$$\begin{cases} S(1) = 2a + 3b + 3c = 2 \\ S(2) = 4a + 9b + 18c = 31 \\ S(3) = 8a + 27b + 81c = 170 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b + 12c = 27 \\ 15b + 69c = 162 \end{cases} \Rightarrow 9c = 27$$

$$\Rightarrow c = 3, b = -3, a = 1$$

Assim, a solução obtida é:

$$\begin{aligned} S(n) &= 2^n - 3^{n+1} + n3^{n+1} \\ &= 2^n + (n-1)3^{n+1} \end{aligned}$$

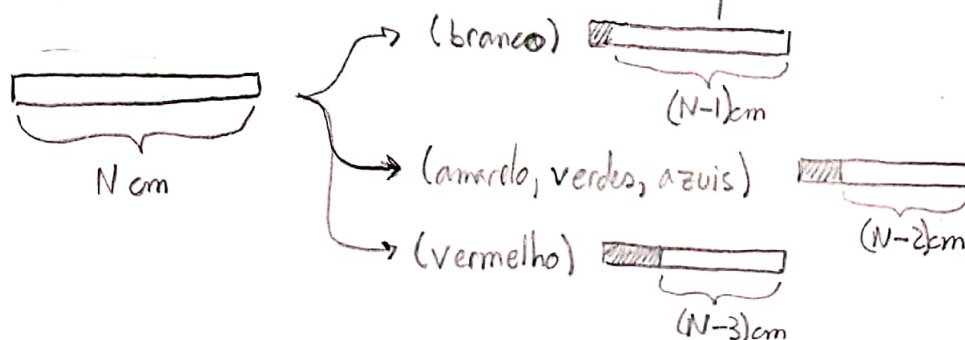
No limite, temos a razão áurea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n+1)}{S(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + n3^{n+2}}{2^n + (n-1)3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n3^{n+2} \left(1 + \frac{1}{3n} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{(n-1)3^{n+1} \left(1 + \frac{1}{3(n-1)} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n-1} = 3$$

Exercício 4

5

A fórmula de recorrência relacionada ao problema é dada por:



$$F(n) = F(n-1) + 3F(n-2) + F(n-3)$$

Além disso, encontramos as condições iniciais:

$F(1) = 1$	$F(2) = 4$	$F(3) = 8$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div>	<div style="display: inline-block; vertical-align: top; margin-right: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Amr</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Azul</div> </div> <div style="display: inline-block; vertical-align: top;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Verde</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Azul</div> </div>	<div style="display: inline-block; vertical-align: top; margin-right: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Amr</div> </div> <div style="display: inline-block; vertical-align: top; margin-right: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Verde</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Azul</div> </div> <div style="display: inline-block; vertical-align: top; margin-right: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Amr</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Verde</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div> </div> <div style="display: inline-block; vertical-align: top;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Azul</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Br</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Vermelho</div> </div>

Assim, nosso problema é:

$$\begin{cases} F(n) = F(n-1) + 3F(n-2) + F(n-3) \\ F(1)=1, F(2)=4, F(3)=8 \end{cases}$$

Com solução da forma $F(n) = \alpha^n$, temos a equação característica:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + 3\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + 3\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$$

Sabemos que $\alpha = -1$ é solução. Assim:

$$\begin{array}{r} \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha - 1 \quad | \quad \alpha + 1 \\ -\alpha^3 + \alpha^2 \quad \quad \quad \alpha^2 - 2\alpha - 1 \\ \hline -2\alpha^2 - 3\alpha - 1 \\ +2\alpha^2 + 2\alpha \quad \quad \quad -\alpha - 1 \\ \hline -\alpha - 1 \\ +\alpha + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (\alpha+1)(\alpha^2-2\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

A solução obtida é:

$$F(n) = a(-1)^n + b(1+\sqrt{2})^n + c(1-\sqrt{2})^n$$

A partir das condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} F(1) = -a + b(1+\sqrt{2}) + c(1-\sqrt{2}) = 1 \\ F(2) = a + b(1+\sqrt{2})^2 + c(1-\sqrt{2})^2 = 4 = a + b(3+2\sqrt{2}) + c(3-2\sqrt{2}) \\ F(3) = -a + b(1+\sqrt{2})^3 + c(1-\sqrt{2})^3 = 8 = -a + b(7+5\sqrt{2}) + c(7-5\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b(4+3\sqrt{2}) + c(4-3\sqrt{2}) = 5 \\ b(6+4\sqrt{2}) + c(6-4\sqrt{2}) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(b+c) + 3\sqrt{2}(b-c) = 5 \\ 6(b+c) + 4\sqrt{2}(b-c) = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(b+c) + \frac{9}{2}\sqrt{2}(b-c) = \frac{15}{2} \\ 6(b+c) + 4\sqrt{2}(b-c) = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(b-c) = \frac{1}{2} \Rightarrow b-c = \frac{\sqrt{2}}{2}, b+c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}+1}{4}, c = \frac{1-\sqrt{2}}{4}, a = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4} + \frac{(1-\sqrt{2})^2}{4} - 1 = \frac{3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-4}{4} = \frac{1}{2}$$

E assim:

$$F(n) = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{4}(1-\sqrt{2})^{n+1}$$

O número de blocos diferentes que podem ser formados com N contêntes, então, é dado por $F(N)$.

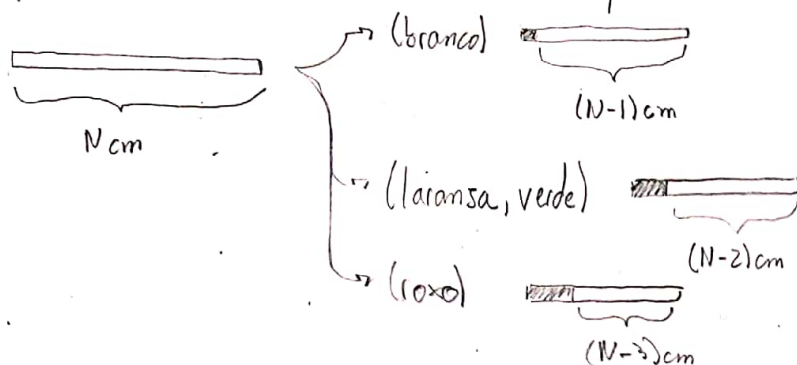
O número áureo da sequência é facilmente encontrado por:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}[(1+\sqrt{2})^{n+2} + (1-\sqrt{2})^{n+2} + 2(-1)^{n+1}]}{\frac{1}{4}[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1} + 2(-1)^n]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+\sqrt{2})^{n+2}}{(1+\sqrt{2})^{n+1}} \frac{[1 + (\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n+2} - 2(\frac{-1}{1+\sqrt{2}})^{n+2}]}{[1 + (\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n+1} - 2(\frac{-1}{1+\sqrt{2}})^{n+1}]} = 1+\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercício 5

7

A fórmula de recorrência relacionada ao problema é dada por:



$$F(n) = F(n-1) + 2F(n-2) + F(n-3)$$

Além disso, encontramos as condições iniciais:

$F(1) = 1$	$F(2) = 3$	$F(3) = 6$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B</div>	<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">L</div></div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">V</div></div>	<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">L</div></div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">L</div></div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">V</div><div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">B</div></div>

Assim, nosso problema é:

$$\begin{cases} F(n) = F(n-1) + 2F(n-2) + F(n-3) \\ F(1) = 1, F(2) = 3, F(3) = 6 \end{cases}$$

Com solução da forma $F(n) = \alpha^n$, temos a equação característica:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + 2\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$$

As raízes, encontradas numericamente, são dadas por:

$$\alpha_1 \approx 2,15, \quad \alpha_{2,3} \approx -0,574 \pm i 0,369$$

$$\Rightarrow F(n) = a \alpha_1^n + b \alpha_2^n + c \alpha_3^n$$

Utilizando as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} F(1) = a \alpha_1 + b \alpha_2 + c \alpha_3 = 1 \\ F(2) = a \alpha_1^2 + b \alpha_2^2 + c \alpha_3^2 = 3 \\ F(3) = a \alpha_1^3 + b \alpha_2^3 + c \alpha_3^3 = 6 \end{cases}$$

Novamente, de forma numérica temos:

$$a \approx 0,355, \quad b \approx -0,680 - 0,736i, \quad c \approx -0,680 + 0,736i$$

8/

E encontramos a equação:

$$F(n) = a\alpha_1^n + b\alpha_2^n + c\alpha_3^n$$

$$\approx (0,355)(2,15)^n + (-0,680 - 0,736i)(-0,574 - 0,369i)^n + (-0,680 + 0,736i)(-0,574 + 0,369i)^n$$

Como $\| -0,574 \pm 0,369i \|^2 < 1$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \alpha_1 \approx 2,15$$